

直线与圆

一、填空题

1. 已知过点 $(-2,0)$ 的直线与圆 $x^2+(y-1)^2=12$ 相交于 A, B 两点, 若 $|AB|=4\sqrt{2}$, 则直线的方程为_____.

【答案】 $x=-2$ 或 $3x+4y+6=0$

【分析】分直线 AB 斜率不存在与斜率存在的情况, 设出直线方程进行讨论, 结合点到直线的距离公式算出弦心距, 结合勾股定理计算即可得.

【详解】当直线 AB 斜率不存在时, 直线 AB 为 $x=-2$,

则有 $(y-1)^2=12-(-2)^2=8$, 即 $y=\pm 2\sqrt{2}+1$,

则 $|AB|=\left|(2\sqrt{2}+1)-(-2\sqrt{2}+1)\right|=4\sqrt{2}$, 符合题意;

当直线 AB 斜率存在时, 设直线 AB 为 $y=k(x+2)$, 即 $kx-y+2k=0$,

由 $x^2+(y-1)^2=12$ 可得圆心为 $(0,1)$, 半径为 $2\sqrt{3}$,

则圆心到直线 AB 的距离为 $d=\frac{|-1+2k|}{\sqrt{k^2+1}}$,

则有 $\left(\frac{|AB|}{2}\right)^2=r^2-d^2=12-\frac{4k^2-4k+1}{k^2+1}=8$, 即 $k=-\frac{3}{4}$,

即 $-\frac{3}{4}x-y+2\times\left(-\frac{3}{4}\right)=0$, 即 $3x+4y+6=0$.

故答案为: $x=-2$ 或 $3x+4y+6=0$.

2. 已知圆 $C_1: x^2+y^2=4$ 与圆 $C_2: x^2+y^2-8x+6y+m=0$ 外切, 此时直线 $l: x+y+1=0$ 被圆 C_2 所截的弦长为_____.

【答案】 $2\sqrt{7}$

【分析】根据两圆外切, 圆心距离等于半径之和, 可得 m , 接着计算 C_2 到直线 $l: x+y+1=0$ 的距离, 最后根据圆的弦长公式计算可得结果.

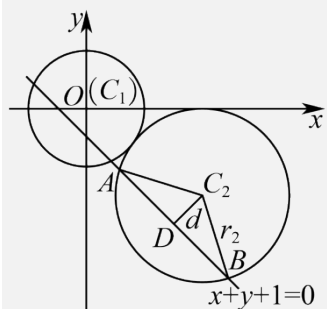
【详解】由 $C_1: x^2 + y^2 = 4$ 得 $C_1(0,0), r_1 = 2$,

将 $C_2: x^2 + y^2 - 8x + 6y + m = 0$ 化为标准方程, 得 $C_2: (x-4)^2 + (y+3)^2 = 25-m (m < 25)$,

$C_2(4,-3), r_2 = \sqrt{25-m}$,

因为两圆外切, 所以 $|C_1C_2| = r_1 + r_2$, 即 $\sqrt{(0-4)^2 + (0+3)^2} = 2 + \sqrt{25-m}$, 解得 $m = 16, r_2 = 3$.

$C_2(4,-3)$ 到直线 $l: x+y+1=0$ 的距离 $d = \frac{|4-3+1|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \sqrt{2}$, 如下图:



则直线 $l: x+y+1=0$ 被圆 C_2 所截的弦长 $|AB| = 2\sqrt{r_2^2 - d^2} = 2\sqrt{9-2} = 2\sqrt{7}$.

故答案为: $2\sqrt{7}$.

3. 直线 $l: 3x - y - 6 = 0$ 被圆 $C: x^2 + y^2 - 2x - 4y = 0$ 截得的弦长为_____.

【答案】 $\sqrt{10}$

【分析】 首先求圆心到直线的距离, 再代入弦长公式.

【详解】 圆 $C: (x-1)^2 + (y-2)^2 = 5$, 圆心为 $(1,2)$, 半径为 $\sqrt{5}$,

圆心 $(1,2)$ 到直线 $l: 3x - y - 6 = 0$ 的距离 $d = \frac{|3-2-6|}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{2}$,

所以弦长为 $2\sqrt{5 - \left(\frac{\sqrt{10}}{2}\right)^2} = \sqrt{10}$.

故答案为: $\sqrt{10}$

4. 圆 $x^2 + y^2 - 8 = 0$ 与圆 $x^2 + y^2 - 3x + 4y - 18 = 0$ 的公共弦的长为_____.

【答案】 4

【分析】将两圆方程作差可得出相交弦所在直线的方程，求出圆 $x^2 + y^2 = 8$ 的圆心到相交弦所在直线的距离，利用勾股定理可求得相交弦长.

【详解】将圆 $x^2 + y^2 - 8 = 0$ 与圆 $x^2 + y^2 - 3x + 4y - 18 = 0$ 相减可得 $3x - 4y + 10 = 0$ ，
即两圆的公共弦所在的直线方程为 $3x - 4y + 10 = 0$ ，

又圆 $x^2 + y^2 - 8 = 0$ 圆心 O 到直线 $3x - 4y + 10 = 0$ 的距离 $d = \frac{|10|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 2$ ，

圆 $x^2 + y^2 = 8$ 的半径为 $2\sqrt{2}$ ，所以公共弦长为 $2\sqrt{(2\sqrt{2})^2 - d^2} = 2\sqrt{(2\sqrt{2})^2 - 2^2} = 4$.

故答案为：4.

5. 若圆 $C_1: x^2 + y^2 = 4$ 与圆 $C_2: x^2 + (y+1)^2 = 7$ 相交于 A, B 两点，则公共弦 $|AB|$ 的长为_____.

【答案】 $2\sqrt{3}$

【分析】

求得交点 A, B 的坐标，进而求得公共弦长.

【详解】由 $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ x^2 + (y+1)^2 = 7 \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x = \sqrt{3} \\ y = 1 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x = -\sqrt{3} \\ y = 1 \end{cases}$ ，

不妨设 $A(\sqrt{3}, 1), B(-\sqrt{3}, 1)$ ，所以 $|AB| = 2\sqrt{3}$.

故答案为： $2\sqrt{3}$

6. 直线 l 经过点 $P(2, -3)$ ，与圆 $C: x^2 + y^2 + 2x + 2y - 14 = 0$ 相交截得的弦长为 $2\sqrt{7}$ ，则直线 l 的方程为_____.

【答案】 $5x - 12y - 46 = 0$ 或 $x = 2$

【分析】将圆的方程化为标准式，即可得到圆心坐标与半径，根据弦长求出圆心到直线的距离，分斜率存在与不存在两种情况讨论，分别求出直线方程.

【详解】圆 $C: x^2 + y^2 + 2x + 2y - 14 = 0$ ，即 $(x+1)^2 + (y+1)^2 = 16$ ，圆心为 $C(-1, -1)$ ，半径 $r = 4$ ，

因为直线与圆相交截得的弦长为 $2\sqrt{7}$ ，

所以圆心到直线的距离 $d = \sqrt{4^2 - (\sqrt{7})^2} = 3$ ，

若直线的斜率不存在，此时直线方程为 $x=2$ ，满足圆心 $C(-1,-1)$ 到直线 $x=2$ 的距离为 3，符合题意；

若直线的斜率存在，设斜率为 k ，则直线方程为 $y+3=k(x-2)$ ，即 $kx-y-2k-3=0$ ，

则 $d = \frac{|-k+1-2k-3|}{\sqrt{k^2+(-1)^2}} = 3$ ，解得 $k = \frac{5}{12}$ ，所以直线方程为 $y+3 = \frac{5}{12}(x-2)$ ，即 $5x-12y-46=0$ ，

综上可得直线方程为 $5x-12y-46=0$ 或 $x=2$ 。

故答案为： $5x-12y-46=0$ 或 $x=2$

7. 已知直线 $l: 2x-y-2=0$ 被圆 $C: x^2+y^2-2x+4y+m=0$ 截得的线段长为 $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ ，则 $m = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

【答案】 4

【分析】首先将圆的方程化为标准式，即可得到圆心坐标与半径，再求出圆心到直线的距离，最后利用勾股定理计算可得。

【详解】圆 $C: x^2+y^2-2x+4y+m=0$ ，即 $(x-1)^2+(y+2)^2=5-m$ 圆心为 $C(1,-2)$ ，半径 $r = \sqrt{5-m}$ ，

则圆心 C 到直线 $l: 2x-y-2=0$ 的距离 $d = \frac{|2 \times 1 - (-2) - 2|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ ，

又直线被圆截得的线段长为 $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ ，所以 $2\sqrt{r^2-d^2} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ ，即 $2\sqrt{5-m-\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)^2} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ ，

解得 $m=4$ 。

故答案为： 4

8. 若直线 $kx-y-2k+3=0$ 与圆 $x^2+(y+1)^2=4$ 相切，则 $k = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

【答案】 $\frac{3}{4}$ 或 0.75

【分析】由圆心到切线的距离等于半径求解。

【详解】由题意圆心为 $(0,-1)$ ，半径为 2，

所以 $\frac{|1-2k+3|}{\sqrt{k^2+1}}=2$, 解得 $k=\frac{3}{4}$.

故答案为: $\frac{3}{4}$.

9. 若过点 $(-2,1)$ 的直线 l 和圆 $x^2+y^2+2x+2y-2=0$ 交于 A,B 两点, 若弦长 $|AB|=2\sqrt{3}$, 则直线 l 的方程为_____.

【答案】 $3x+4y+2=0$ 或 $x=-2$

【分析】

根据题意结合垂径定理求得 $d=1$, 再利用点到直线的距离公式运算求解, 注意讨论直线的斜率是否存在.

【详解】由题意可知: 圆 $x^2+y^2+2x+2y-2=0$ 的圆心 $C(-1,-1)$, 半径 $r=2$,

设圆心 $C(-1,-1)$ 到直线 l 的距离为 d ,

若弦长 $|AB|=2\sqrt{3}$, 则 $|AB|=2\sqrt{r^2-d^2}=2\sqrt{4-d^2}=2\sqrt{3}$, 可得 $d=1$,

当直线 l 的斜率不存在时, 即直线 l 为 $x=-2$, 故圆心 $C(-1,-1)$ 到直线 l 的距离为 $d=1$, 符合题意;

当直线 l 的斜率存在时, 设为 k , 则直线 l 为 $y-1=k(x+2)$, 即 $kx-y+1+2k=0$,

故圆心 $C(-1,-1)$ 到直线 l 的距离为 $d=\frac{|-k+1+1+2k|}{\sqrt{k^2+(-1)^2}}=\frac{|k+2|}{\sqrt{k^2+1}}=1$, 解得 $k=-\frac{3}{4}$

此时直线 l 为 $3x+4y+2=0$;

综上所述: 直线 l 为 $3x+4y+2=0$ 或 $x=-2$.

故答案为: $3x+4y+2=0$ 或 $x=-2$.

10. 直线 l 过点 $(-4,0)$ 且与圆 $(x+1)^2+(y-2)^2=9$ 相切, 那么直线 l 的方程为_____.

【答案】 $x=-4$ 或 $5x+12y+20=0$

【分析】当直线 l 的斜率 k 不存在时, 直线 l 的方程为 $x=-4$, 与圆相切, 成立; 当直线 l 的斜率 k 存在时, 设直线 l 的方程为 $kx-y+4k=0$, 圆心 $C(-1,2)$ 到直线 l 的距离

$$d = \frac{|-k-2+4k|}{\sqrt{k^2+1}} = 3, \text{ 求出斜率 } k, \text{ 由此能出直线 } l \text{ 的方程.}$$

【详解】 $\because$ 直线 l 过点 $(-4, 0)$ 且与圆 $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 9$ 相切,

$\therefore$ 圆 $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 9$ 的圆心 $C(-1, 2)$, 半径 $r=3$,

当直线 l 的斜率 k 不存在时, 直线 l 的方程为 $x=-4$, 与圆相切, 成立;

当直线 l 的斜率 k 存在时,

设直线 l 的方程为 $y=k(x+4)$, 即 $kx-y+4k=0$,

$$\text{圆心 } C(-1, 2) \text{ 到直线 } l \text{ 的距离 } d = \frac{|-k-2+4k|}{\sqrt{k^2+1}} = 3,$$

$$\text{解得 } k = -\frac{5}{12}, \therefore \text{ 直线 } l \text{ 的方程为 } -\frac{5}{12}x - y - \frac{5}{3} = 0, \text{ 即 } 5x + 12y + 20 = 0.$$

综上, 直线 l 的方程为 $x=-4$ 或 $5x+12y+20=0$.

故答案为: $x=-4$ 或 $5x+12y+20=0$.

11. 圆 $x^2 + y^2 - 10x - 10y = 0$ 与圆 $x^2 + y^2 - 6x + 2y - 40 = 0$ 的公共弦长为_____.

【答案】 $4\sqrt{10}$

【分析】由两圆的方程先求出公共弦所在的直线方程, 再利用点到直线的距离公式, 弦长公式, 求得公共弦长即可.

【详解】 $\because$ 两圆方程分别为: $x^2 + y^2 - 10x - 10y = 0$ ①,

$$x^2 + y^2 - 6x + 2y - 40 = 0$$
 ②,

由 ② - ① 可得: $4x + 12y - 40 = 0$, 即 $x + 3y - 10 = 0$,

$\therefore$ 两圆的公共弦所在的直线方程为: $x + 3y - 10 = 0$,

$\because x^2 + y^2 - 10x - 10y = 0$ 的圆心坐标为 $(5, 5)$, 半径为 $5\sqrt{2}$,

$$\therefore \text{ 圆心到公共弦的距离为: } d = \frac{|5+15-10|}{\sqrt{10}} = \sqrt{10},$$

$$\therefore \text{ 公共弦长为: } 2\sqrt{(5\sqrt{2})^2 - (\sqrt{10})^2} = 4\sqrt{10}.$$

综上所述, 公共弦长为: $4\sqrt{10}$

故答案为： $4\sqrt{10}$.

12. 若直线 $l: x - \sqrt{3}y + 9 = 0$ 被圆 $C: x^2 + y^2 + 2x - m = 0$ 截得线段的长为 6, 则实数 m 的值为_____.

【答案】 24

【分析】把圆的一般方程化为圆的标准方程, 利用点到直线的距离公式以及勾股定理进行求解.

【详解】把圆 $C: x^2 + y^2 + 2x - m = 0$ 化为标准方程有: $(x+1)^2 + y^2 = 1+m$,

所以圆心 $C(-1,0)$, 半径 $r = \sqrt{1+m}$, 又直线 $l: x - \sqrt{3}y + 9 = 0$,

所以圆心 C 到直线的距离为 $d = \frac{|-1-0+9|}{\sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2}} = 4$,

因为直线 $l: x - \sqrt{3}y + 9 = 0$ 被圆 $C: x^2 + y^2 + 2x - m = 0$ 截得线段的长为 6,

根据勾股定理有: $d^2 + 3^2 = r^2$, 解得 $r = 5$,

所以 $r = \sqrt{1+m} = 5$, 解得 $m = 24$.

故答案为: 24.

13. 直线 $y = 2x + 1$ 与圆 $C: x^2 + y^2 - 4x - 5 = 0$ 相交于 M, N 两点, 则 $|MN| =$ _____.

【答案】 4

【分析】利用点到直线的距离公式求出圆心到直线的距离, 再根据勾股定理求解.

【详解】解: 圆 $C: (x-2)^2 + y^2 = 9$, 其圆心坐标为 $(2,0)$, 半径为 3.

圆心 $(2,0)$ 到直线 $2x - y + 1 = 0$ 的距离 $d = \frac{|2 \times 2 + 1|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \sqrt{5}$,

则 $|MN| = 2\sqrt{r^2 - d^2} = 2\sqrt{9 - 5} = 4$.

故答案为: 4.

14. 直线 $l: x - y - m = 0$ 被圆 $C: x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0$ 截得的弦长为 $4\sqrt{2}$, 则 m 的值为_____.

【答案】1 或 9

【分析】根据圆的弦长公式计算即可.

【详解】 $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0 \Rightarrow (x-2)^2 + (y+3)^2 = 16$,

圆心 $C(2, -3)$, 半径 $r = 4$,

圆心 C 到直线 l 的距离 $d = \frac{|2+3-m|}{\sqrt{2}} = \frac{|5-m|}{\sqrt{2}}$,

则 $2\sqrt{r^2 - d^2} = 4\sqrt{2}$, 即 $16 - \frac{(5-m)^2}{2} = 8$, 解得 $m = 9$ 或 1 .

故答案为: 9 或 1.

15. 过圆 $x^2 + y^2 = 5$ 上一点 $M(1, -2)$ 作圆的切线 l , 则直线 l 的方程为_____.

【答案】 $x-2y-5=0$

【分析】本题考查在某点切线问题, 根据 $OM \perp l$, 可得直线 l 的斜率, 再利用点斜式求直线 l 的方程.

【详解】根据题意易知直线 l 得斜率存在, 则 $k_l k_{OM} = -1$, 即 $k_l = -\frac{1}{k_{OM}} = \frac{1}{2}$.

则直线 l 得方程为: $y+2 = \frac{1}{2}(x-1)$ 即: $x-2y-5=0$.

故答案为: $x-2y-5=0$.